Die seltsame imaginäre Zahl i

Wer kennt sie denn?

MAN WEISS NUR GEHEIMNISVOLLES ÜBER SIE ....

Stand: Helloween 2018

Text Nr. 50005

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Wer weiß denn sowas?

(1) Zahlen erfinden, um Gleichungen zu lösen:

Mathematiker sind gründliche Menschen, da muss alles passen.

Doch es passt so gar nicht, wenn man herausfindet, dass die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ keine Lösung hat. Dieses Problem gab es für Schüler schon öfters. In Klasse 5 kennt man keine Lösung der Gleichung $2x = 1$, weil man noch nicht weiß, dass es Brüche gibt. Diese (hier ist es $\frac{1}{2}$) hat man eigens für solche Gleichungen eingeführt.

In Klasse 7 wird man über die Gleichung $x^2 = 2$ ähnliches behaupten, weil man keine Zahl findet, deren Quadrat 2 ergibt. Daher hat man die Quadratwurzeln „erfunden".

Eine Lösung ist $\sqrt{2}$. Dass $\sqrt{2}$ eine „Zahl" ist, versteht man dann, wenn man gelernt hat, dass man mit ihr „vernünftig" rechnen kann.

Nun zu unserem aktuellen Problem: Man findet in der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen keine Lösung für die Gleichung $x^2 + 1 = 0$, die man so umstellen kann: $x^2 = -1$.

Mathematiker haben eine Zahl eingeführt, welche eine Lösung dieser Gleichung sein soll. Man bezeichnet sie mit dem Buchstaben **i** und nennt sie ***imaginäre Einheit***.

Die Bezeichnung „imaginär" deutet schon darauf hin, dass diese Zahl nicht reell sein kann, denn wenn man die Probe in dieser Gleichung macht, dann erhält man $i^2 = -1$.

Nun hat man einmal gelernt, dass Quadrate von reellen Zahlen nie negativ werden, also kann **i** keine reelle Zahl sein. Der Versuch, i in der Form 1,… irgendwie darzustellen, scheitert also.

Manche folgern aus der Gleichung $i^2 = -1$ die Schreibweise $i = \sqrt{-1}$. Dies kann man tun, bekommt aber <u>Probleme</u>, wenn man so tut, als ob dafür alle Gesetze gelten.

Ein Beispiel ist folgende Berechnung von **i**^{2}:

1. Berechnung: $i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$

2. Berechnung: $i^2 = -1$ nach Definition.

Vergleicht man die beiden Ergebnisse, erhält man $1 = -1$, was der Widerspruch ist.

Jeder Widerspruch hat eine Ursache. Diese ist hier die Verwendung der Rechenregel

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

Sie gilt offensichtlich nicht für das „Symbol" $\sqrt{-1}$.

Bleibt man bei $i^2 = -1$, dann ist alles in Ordnung, denn so wurde **i** definiert.

(2) Ist *i* positiv oder negativ?

Zunächst einmal ist $i \neq 0$, denn wäre i = 0, dann wäre $i^2 = 0$ und nicht -1.

Nun versuchen wir es mit positiv oder negativ:

1. Fall: Nehmen wir an: $i > 0$. Dann multiplizieren wir diese Ungleichung mit i.
Es folgt $i^2 > 0 \cdot i$ Das heißt aber $-1 > 0$ und ist ein Widerspruch.
Also ist die Annahme $i > 0$ falsch.

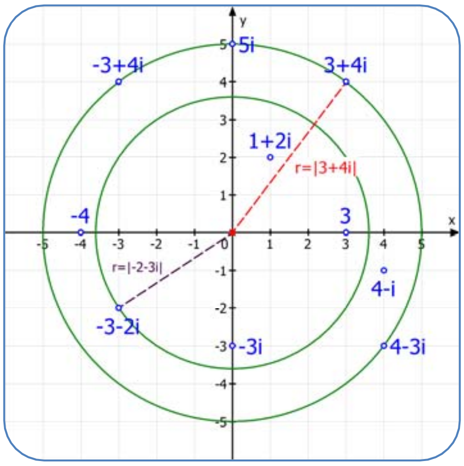
2. Fall: Nun nehmen wir an: $i < 0$. Dann multiplizieren wir diese Ungleichung mit (-i).
Wenn i laut Annahme negativ ist, dann ist (–i) positiv.
Daher bleibt das Zeichen < erhalten, wenn man die Ungleichung damit multipliziert.
Es folgt also $-i^2 < 0 \cdot (-i)$ Das heißt aber $1 < 0$
Dies ist ein Widerspruch, also ist die Annahme $i < 0$ falsch.

Also ist i weder positiv noch negativ.

Eine **komplexe Zahl** ist die Summe aus einer reellen Zahl und einer imaginären Zahl.
Etwa: 2+3i. 3-i, $\sqrt{2} - i \cdot \sqrt{5}$. 8,2i oder auch nur 5 (in der Form 5+0i).
Echt komplexe Zahlen, die also nicht reell sind, kann man nicht der Größe nach vergleichen, weil der imaginäre Anteil weder positiv noch negativ ist.

(3) Zweidimensionale Darstellung von komplexen Zahlen

Reelle Zahlen kann man auf einer Zahlenachse anordnen, wie wir es auf der x-Achse tun.
Carl Friedrich Gauß hat damit begonnen, komplexe Zahlen in einer Ebene anzuordnen.
Jetzt erkennt man auch, dass eine Anordnung, die alleine durch kleiner oder größer entschieden wird, nicht mehr möglich ist.



Es gibt eine allerdings sehr schwache Art des „Größenvergleichs“: Man kann zu jeder komplexen Zahl einen Betrag berechnen. Darunter versteht man den Abstand des zu einer komplexen Zahl gehörenden Punktes vom Ursprung.

Beispiel: Die komplexe Zahl $z_1 = 3 + 4i$ wird durch den Punkt $Z_1(3 \mid 4)$. Dargestellt. Sein Abstand zu $O(0 \mid 0)$ ist
$r_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$. Z_1 liegt also auf dem Kreis um O mit Radius 5.
Genau wie auch die Punkte von 4-3i und -3+4i und unendlich vielen weitere.

Die Abbildung zeigt noch, dass die Zahl $z_2 = -2 - 3i$ mit dem Betrag $|-2 - 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.
Der zugehörige Punkt liegt auf einem Kreis um O mit Radius $\sqrt{13}$.
Man könnte also „vergleichen“: z_2 hat einen kleineren Betrag als z_1. Dies kann man so deuten, dass z_2 näher beim Ursprung liegt als z_1. Mehr vergleichen geht nicht!